9 Endomorphismen II

$\underbrace{f^i = f \circ \ldots \circ f}_{i \text{ Faktoren}} \Rightarrow \forall i,j \geq 0: f^i \circ f^j = f^{i+j} = f^j \circ f^i.$

$f: V \to V$ linear.

9.1 Minimalpolynom

Sei f ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V.

Definition: Für alle natürliche Zahlen i sind die Endomorphismen $f^i \in \mathrm{End}_K(V)$ definiert durch $\boxed{f^0 := \mathrm{id}_V}$ und $\boxed{f^{i+1} := f \circ f^i}$. Für jedes Polynom $\boxed{\varphi(X) = \sum'_{i \geqslant 0} a_i X^i} \in K[X]$ ist der Endomorphismus $\varphi(f) \in \boxed{\mathrm{End}_K(V)}$ definiert durch

$$\boxed{\varphi(f) := \sum_{i \geqslant 0}{}' a_i f^i \colon\ V \to V,\ v \mapsto \sum_{i \geqslant 0}{}' a_i f^i(v).}$$

Bemerkung: Dies bedeutet, dass wir das Element f des Rings $\mathrm{End}_K(f)$ in das Polynom φ einsetzen.

Grundeigenschaften: Für alle $i, j \geqslant 0$ und $\varphi, \psi \in K[X]$ und $a \in K$ gilt:

(a) $f^i \circ f^j = f^{i+j}$.

(b) $(a\varphi)(f) = a\varphi(f)$.

(c) $(\varphi + \psi)(f) = \varphi(f) + \psi(f)$.

(d) $(\varphi\psi)(f) = \varphi(f) \circ \psi(f)$.

d.h. $\exists \omega \in K[X]$: $\psi = \varphi \cdot \omega$

Proposition: Für jedes normierte Polynom $\varphi(X) \in K[X]$ sind äquivalent:

(a) Es ist $\varphi(f) = 0$, und für alle $\psi(X) \in K[X]$ mit $\psi(f) = 0$ gilt $\varphi|\psi$.

(b) Es ist $\varphi(f) = 0$, und für alle $\psi(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $\psi(f) = 0$ gilt $\deg \varphi \leqslant \deg \psi$.

Ausserdem ist ein solches φ eindeutig bestimmt, wenn es existiert.

Definition: Dieses φ heisst das *Minimalpolynom von f*.

Bew.: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $\psi \neq 0$, $\psi(f) = 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} \varphi | \psi \Rightarrow \deg(\varphi) \leq \deg(\psi)$. ✓

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $\psi(f) = 0$. Ist $\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi | \psi$.

Sonst sei $n = \deg(\psi) \geq 0$. $\overset{(b)}{\Rightarrow} \deg(\varphi) \leq n$. Schreibe $\psi = aX^n +$ kleinere Terme

$\varphi = X^m +$ kleinere Terme, $m \leq n$

Setze $\psi' := \psi - aX^{n-m} \cdot \varphi = (aX^n + \ldots) - aX^{n-m} \cdot (X^m + \ldots) \Rightarrow \deg(\psi') < n$.

Proposition: Ist $\dim_K(V) < \infty$, so existiert das Minimalpolynom von f.

Ul $\psi'(f) = \psi(f) - af^{n-m} \circ \varphi(f) = 0$.

Induktion über n: IA $\Rightarrow \varphi | \psi'$. $\Rightarrow \varphi \,|\, \psi = \psi' + aX^{n-m} \cdot \varphi$. ✓

Sei φ' normiert mit $\varphi'(f) = 0$ und $\forall \psi: \psi(f) = 0 \Rightarrow \varphi' | \psi$

$\Rightarrow \varphi | \varphi'$ und $\varphi' | \varphi$. $\Rightarrow \varphi = \varphi'$. qed.

Beweis: $\dim(V) =: n < \infty \Rightarrow \dim_K \mathrm{End}_K(V) = n^2 < \infty$

$\Rightarrow f^0, f^1, \ldots, f^{n^2}$ linear abhängig.

Sei $a_0 f^0 + \ldots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$, $a_i \in K$, nicht alle $= 0$.

$$\underset{\psi(f)}{\parallel} \qquad \text{für } \psi(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n^2} X^{n^2} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists\, \varphi \neq 0 : \varphi(f) = 0.$

Sei φ eines von minimalem Grad.

Ersetze φ durch $c\varphi$ für $c \in K^\times \Rightarrow$ OBdA φ normiert.

$\Rightarrow \varphi$ erfüllt (b). qed.

Proposition: Ist $\varphi(f) = 0$, so ist jeder Eigenwert $\lambda \in K$ von f eine Nullstelle von φ.

Bew.: Sei v Eigenvektor zum EW $\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v$, $v \neq 0$.

$\Rightarrow \forall i: f^i(v) = \lambda^i v$. Sei $\varphi(X) = \sum_{i \geq 0}' a_i X^i \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(\lambda) = 0.$

$0 = 0_V(v) = \varphi(f)(v) = \sum_{i\geq 0}' a_i f^i(v) = \sum_{i \geq 0}' a_i \lambda^i v = \varphi(\lambda) \cdot v$ qed.

Folge: Ein Endomorphismus eines unendlich-dimensionalen Vektorraums mit unendlich vielen Eigenwerten besitzt kein Minimalpolynom.

Jedes $\varphi \in K[X] \setminus \{0\}$ hat nur endlich viele Nullstellen.

Definition: Für jede quadratische Matrix A über K definieren wir genau wie oben

$$\boxed{\varphi(A) := \sum_{i \geqslant 0}{}' a_i A^i} \quad \text{falls} \quad \boxed{\varphi(X) = \sum_{i \geqslant 0}{}' a_i X^i}$$

$\varphi(L_A)(v) = \sum a_i L_A^i(v)$
$\qquad \|$
$\varphi(A)v = \sum a_i A^i v$
$\quad \|$
$L_{\varphi(A)}(v)$

sowie das Minimalpolynom von A durch die entsprechenden Eigenschaften. Dann gilt insbesondere $L_{\varphi(A)} = \varphi(L_A)$, und das Minimalpolynom von A ist gleich dem von L_A.

Beispiel: (a) Die Matrix $A := \boxed{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)}$ hat Minimalpolynom $X^2 - 4X + 1$.

(b) Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ hat Minimalpolynom $X - 2$.

(c) Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ hat Minimalpolynom $(X - 2)^2$.

(a) $\left.\begin{array}{l} A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$ lin. unabh.

$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} = 4A^1 - A^0$

$\Rightarrow$ Min Pol $= X^2 - 4X + 1$.

(b) $A^1 = 2 \cdot I_2 = 2 \cdot A^0 \Rightarrow \varphi(X) := X - 2$ erfüllt $\varphi(A) = 0$.

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot A - 4 \cdot I_2 \Rightarrow \varphi(X) := X^2 - 4X + 4$ erfüllt $\varphi(A) = 0$.

__Bsp.:__ Min. Pol $= 1 = X^0 \iff A^0 = 0_n \iff I_n = 0_n \iff n = 0$.

__Bsp.:__ Min. Pol. $= X - \lambda \iff (X - \lambda)(A) = 0 \iff A = \lambda \cdot I_n$. und $n > 0$.

__Bsp.:__ Min. Pol $= X^m$ für ein $m \geq 0 \iff A^m = 0$ für ein $m \iff A$ nilpotent.

9.2 Satz von Cayley-Hamilton

$\exists B:$

$$_B[f]_B = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \ddots \lambda_1 & & \\ \hline & \lambda_2 \ddots \lambda_2 & \\ \hline & & \ddots \end{array}\right) \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \end{array}$$

Ab jetzt sei zusätzlich $\dim_K(V) < \infty$.

Proposition: Ist f diagonalisierbar mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i der Multiplizität m_i für $i = 1, \ldots, r$, so hat f das

charakteristische Polynom $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ ✓

und das Minimal-Polynom $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$. $=: \varphi$

Beispiel: Besitzt V eine Basis B mit $|B| = n$ und Darstellungsmatrix der Form

$$\boxed{_B[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}$$

so sind das charakteristische und das Minimal-Polynom von f beide gleich $(X - \lambda)^n$.

$$_B[f]_B = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ \hline & \lambda_2 I_{m_2} & \\ \hline & & \ddots \end{array}\right)$$

Wissen schon: Jedes λ_i ist Nullstelle des Min. Pol.

$$\Rightarrow {}_B[\varphi(f)]_B = \left(\begin{array}{c|c|c} \varphi(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ \hline & \varphi(\lambda_2) I_{m_2} & \\ \hline & & \ddots \end{array}\right) = 0$$

$\Rightarrow \varphi(f) = 0$. $\Rightarrow \varphi = $ Min. Pol.

qed

<u>Bsp.</u>: $A = \lambda \cdot I_n + N$; $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \forall\, 0 \le i \le n : N^i = \left(\begin{array}{cccccc} \overbrace{0 \cdots 0}^{i} & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} i \end{array}$$

<u>Beweis</u>: $i = 0$: $N^i = I_n$ ✓.

$i \mapsto i+1$: $N^{i+1} = N N^i$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cccccc} \overbrace{0 \cdots 0}^{i} & 1 & & & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} i \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{i+1} & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & \end{pmatrix} \quad ✓.$$

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^n = 0.$$

$\Rightarrow N^0, N^1, \ldots, N^{n-1}$ lin. unabh.

$0 = N^n = (A - \lambda I_n)^n = (X - \lambda)^n (A)$. $\Rightarrow$ Min.Pol teilt $(X - \lambda)^n$.

$0 \le i < n$: $A^i = \underline{\underline{(\lambda \cdot I_n + N)^i}} = \sum_{j=0}^{i} \lambda^{i-j} \cdot N^j \binom{i}{j} = \begin{pmatrix} \lambda^i & i\lambda^{i-1} & \cdot & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & i\lambda^{i-1} \\ & & & & \lambda^i \end{pmatrix} \leftarrow$

$\Rightarrow A^0, A^1, \ldots, A^{n-1}$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ Min. Pol. $= (X - \lambda)^n$.